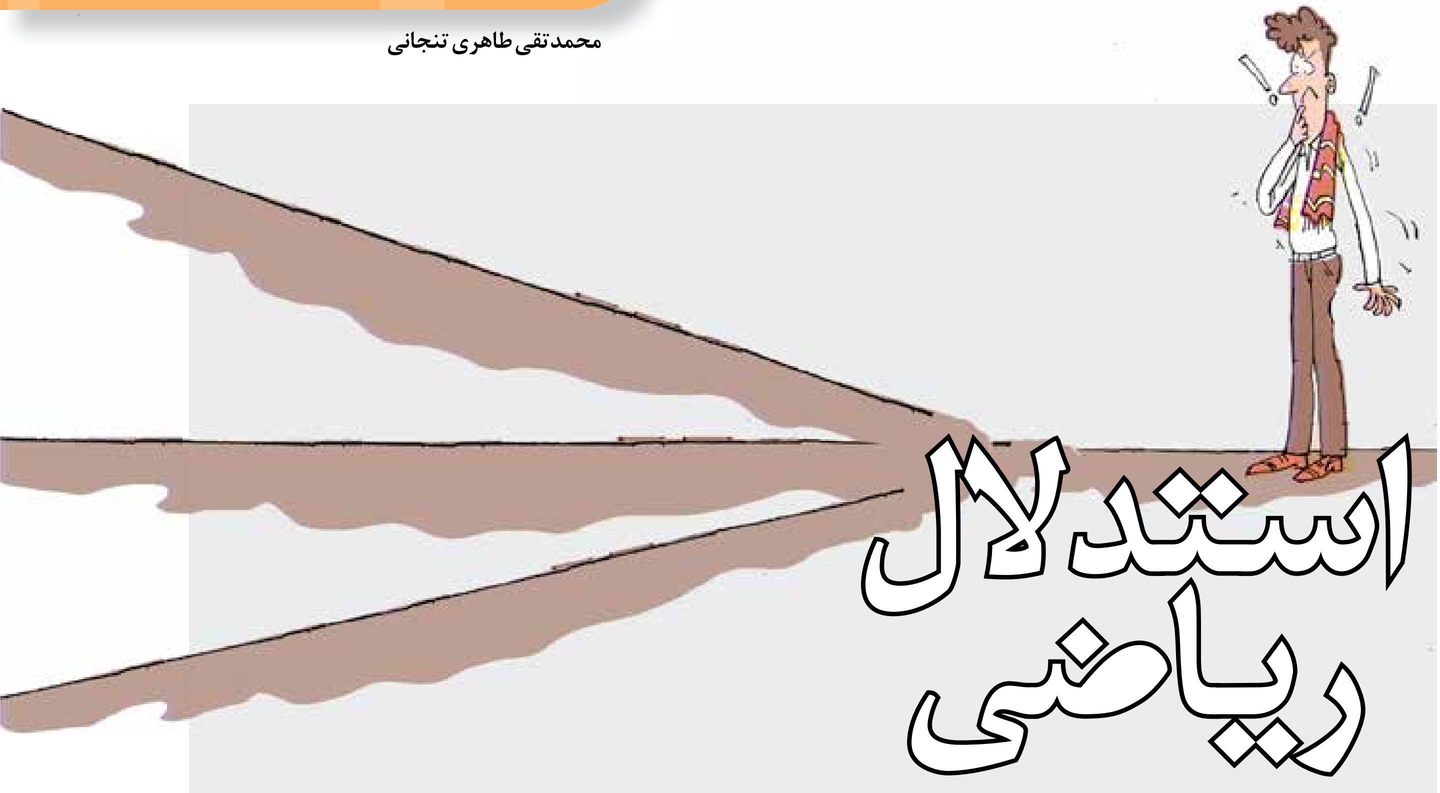
محمدتقی طاهری تنجانی



استدلال ریاضی

اشاره

اثبات یک مسئله چگونه شکل می‌گیرد؟ برای حل یک مسئله از چه روشی باید استفاده کرد؟ کاربرد یک روش تا چه حد است؟ این‌ها سؤالاتی هستند که معمولاً در اثبات مسائل، خصوصاً مسائل ریاضی، پیش روی ماست.

در این نوشتار سعی بر آن است که به اختصار با روش‌های اثبات و استدلال ریاضی آشنا شویم. حل یک مسئله در وهلهٔ اول نیازمند روشی است که با اتکا به آن بتوان قدم‌به‌قدم جلو رفت و به نتیجهٔ موردنظر نایل آمد.

هر مسئله از دو قسمت تشکیل می‌شود: قسمت اول مفروضات و داده‌های مسئله و قسمت دوم هدف و حکم مسئله است. منظور از حل یک مسئله آن است که با استفاده از یک سلسله قوانین و اصول، و با تکیه بر مفروضات مسئله، به هدف موردنظر برسیم؛ شیوه‌ای که می‌توان از آن استفاده کرد را «برهان» (اثبات) می‌گویند. قبل از ورود به شیوه‌های استدلال، به مفهوم «تمثیل» می‌پردازیم که غالباً در استدلال‌های عامیانه از آن استفاده می‌شود.

تمثیل

انسان برای رفتار خود استدلالی دارد و این استدلال را بر حسب تجربه آموخته است. در واقع در هر فعالیت، به دنبال نمونه‌ای است که در ذهن او نقش بسته است. این شروع قضاوت و استدلال برای انسان است. کودکان بیشتر- به‌ویژه در سال‌های نخست زندگی خود- استدلالشان را براساس شباهت پدیده‌ها می‌گذرانند. شبیه‌سازی می‌کنند و به دلیل شباهت بین دو پدیده دربارهٔ آن‌ها به نتیجهٔ یکسانی می‌رسند. این استدلال کودکانه نام علمی «تمثیل» و یا «استدلال تمثیلی» دارد.

در داوری‌ها گاهی به «عقل سلیم» تکیه می‌شود. در این روش، از تمثیل استفاده می‌کنند که به تنهایی نمی‌تواند وسیله‌ای برای کشف حقیقت باشد. هزاران سال با تکیه بر عقل سلیم می‌پنداشتند که خورشید و همهٔ ستارگان به دور زمین می‌چرخند و در نتیجه زمین مرکز عالم است. هر کس هم خلاف آن استدلال می‌کرد (مانند گالیله)، یا محکوم به آتش و یا محکوم به سکوت می‌شد.

عقل سلیم تنها زمانی می‌تواند ما را به سمت کشف حقیقت رهنمون شود که متکی بر مشاهده و تجربه باشد. پس از مشاهدات لازم، حالت‌های متفاوت را به محک تجربه بسپرد و روابط بین آن‌ها را کشف کند و حدس بزند. این حدس در دانش‌های طبیعی به یاری آزمایش و در ریاضیات با استدلال منطقی تأیید یا تکذیب می‌شود.

استدلال استنتاجی

در این روش با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم (نظیر تعاریف، اصول و قضایا)، به اثبات حکم موردنظر می‌پردازیم. از این روش هنگامی استفاده می‌کنیم که مطمئن باشیم حکم موردنظر همواره درست است. با ذکر چند مثال، نحوهٔ استفاده از این روش را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. ثابت کنید مجموع هر عدد صحیح زوج و هر عدد صحیح فرد همواره عددی فرد است.

حل. اگر a عددی زوج و دلخواه باشد، آن را به‌صورت $a=2k$، و اگر b عددی فرد و دلخواه باشد، آن را به صورت $b=2k'+1$ نشان می‌دهیم (k و k' عدد صحیح هستند). می‌توان نوشت:

$$a+b=2k+(2k'+1)=2(\underbrace{k+k'}_{k'\in\mathbb{Z}})+1=2k''+1$$

یعنی a+b عددی فرد است.

مثال ۲. برای هر عدد صحیح a ثابت کنید a^2+a عددی زوج است.

حل. در دو حالت مسئله را بررسی می‌کنیم:

◆ **حالت اول:** اگر a عددی صحیح و زوج باشد، داریم: $a=2k \quad (k\in\mathbb{Z})$. می‌توان نوشت:

$$a^2+a=a(a+1)=2k(2k+1)=2(\underbrace{2k^2+k}_{k''\in\mathbb{Z}})=2k'$$

یعنی a^2+a زوج است.

◆ **حالت دوم:** اگر a عددی صحیح و فرد باشد، داریم: $a=2k+1\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$ و نیز داریم:

$$a^2+a=a(a+1)=(2k+1)(2k+2)=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k'\in\mathbb{Z}}=2k'$$

یعنی a^2+a زوج است. پس در هر دو حالت a^2+a همواره عددی زوج است.

مثال ۳. اگر a و b دو عدد صحیح متوالی باشند، به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید $ab+a+b$ عددی فرد است.

حل. چون a و b دو عدد صحیح متوالی‌اند، پس یکی زوج و دیگری فرد است و حاصل‌ضرب یک عدد فرد در یک عدد زوج عددی زوج است. پس ab عددی زوج است. از طرف دیگر، جمع دو عدد زوج و فرد عددی فرد است، پس عبارت $ab+a+b$ نیز عددی فرد است.

این استدلال را به زبان ریاضی به‌صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases} a=2k \\ b=2k+1 \end{cases} \Rightarrow ab+a+b=(2k)(2k+1)+[2k+(2k+1)]$$

$$k\in\mathbb{Z} \qquad =2(\underbrace{k(k+1)}_{q\in\mathbb{Z}})+4k+1$$

$$=2\underbrace{(q+2k)}_{q\in\mathbb{Z}}+1$$

$$=2q'+1$$

مثال ۴. به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید، هر عدد فرد به یکی از صورت‌های ۴k+۱ یا ۴k-۱ نوشته می‌شود $(k\in\mathbb{Z})$.

حل. فرض کنیم a عددی فرد باشد. می‌توان نوشت:

$$a=2m+1\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

حال عدد صحیح m یا فرد است و یا زوج. این دو حالت را در نظر می‌گیریم:

اگر m زوج باشد، داریم:

$$m=2k\Rightarrow a=2(2k)+1=4k+1$$

اگر m فرد باشد، داریم:

$$m=2k+1\Rightarrow a=2(2k+1)+1=4k+3$$
$$=4k+4-1=4\underbrace{(k+1)}_{k'\in\mathbb{Z}}-1=4k'-1$$

مثال نقض

برخی از احکام به‌صورت کلی و عمومی بیان می‌شوند. مانند اینکه بگوییم مربع هر عدد حقیقی مثبت است! یا هر دو زاویهٔ متقابل به رأس مساوی‌اند و یا هر عدد اول فرد است. این‌گونه احکام (گزاره‌ها) گاهی درست و گاهی نادرست‌اند.

به مثالی که ارائه می‌شود تا درستی یک حکم (گزاره) کلی را باطل کند، مثال نقض می‌گویند.

مثال ۵. با ذکر یک مثال نقض، نادرستی گزارهٔ «مکعب هر عدد صحیح از مربع آن عدد همواره بزرگ‌تر است» را نشان دهید.

حل. فرض کنیم: $a=-2$، پس: $a^2=4$ و $a^3=-8$ و درنتیجه: $a^3>a^2$.

مثال ۶. **لایب‌نیتز**، یکی از مشهورترین ریاضی‌دانان قرن هفدهم آلمان و از ابداع‌کنندگان حسابان، ثابت کرد برای مقادیر صحیح n، عبارت n^3-n بر ۳، عبارت n^5-n بر ۵، و عبارت n^7-n بر ۷ بخش‌پذیر است. او حدس زد به ازای هر عدد فرد k و هر عدد طبیعی n، عبارت n^k-n بر k بخش‌پذیر است. آیا این حدس معتبر است؟

حل. خیر، کافی است از مثال نقض $k=9$ استفاده شود. $2^9-2=510$ که عدد ۵۱۰ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

اثبات بازگشتی

نوعی از اثبات‌های ریاضی اســتدلالی است که در آن حکم را به احکام معادل تبدیل و یا به احکام جزئی‌تر تجزیه می‌کنیم تا اینکه به یک گزارهٔ همواره درست برسیم. پس اگر از این گزارهٔ همیشه درست بتوانیم به حکم اولیه برســیم، مسئله را به روش اثبات بازگشتی حل کرده‌ایــم. به عبارت دیگر، در این روش باید توجه داشــت که روابط همگی برگشت‌پذیر باشند. یعنی اگر از گزارهٔ A گزارهٔ B نتیجه شود، از B بتــوان A را نتیجــه گرفت (دو گزارهٔ معــادل A و B را با نماد $A \Leftrightarrow B$ نشان می‌دهند).

مثال ۷. به روش اثبات بازگشتی نشان دهید. برای عددهای حقیقی دلخواه a و b و c داریم:

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$$

حل. معادل حکم را می‌نویسیم. می‌توان طرفین حکم را در عدد ۲ ضرب کرد و به‌صورت زیر معادل‌های حکم را نوشت:

$$2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2ac+2bc$$
$$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$$
$$+(c^2-2bc+a^2) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$$

عبــارت اخیر مجمــوع مربعات اعداد حقیقی اســت که همواره نامنفی (مثبت یا صفر) اســت. پس عبارت اخیر همواره درست و در نتیجه معادل‌های آن و از جمله حکم مسئله نیز همواره درست است.

مثال ۸. اگر x، y و z اعداد حقیقی مثبت باشــند و $x<y$، آن‌گاه ثابت کنید: $\frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+z}$.

حل. از روش اثبات بازگشتی استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+z} \Leftrightarrow x(y+z)<y(x+z)$$
$$\Leftrightarrow xy+xz<yx+yz$$
$$\Leftrightarrow xz<yz$$
$$\xleftrightarrow{\mathbb{Z}>0} x<y$$

نابرابری اخیر همواره درست است، پس معادل‌های آن و از جمله حکم مسئله نیز همواره برقرار است.

مثال ۹. به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید: $10-4\sqrt{5}<2$

حل. معادل‌های حکم را می‌نویسیم:

$$10-4\sqrt{5}<2 \Leftrightarrow 8<4\sqrt{5} \Leftrightarrow 2<\sqrt{5} \Leftrightarrow 4<5$$

عبارت اخیر همواره درســت است، پس حکم مسئله نیز همواره برقرار است.

مثــال ۱۰. در یک آزمون از جمله ســؤال‌ها این بوده اســت: اگر: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$، آن‌گاه ثابت کنید: $\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}=\frac{xy}{ab}$ (مخرج‌ها مخالف صفر فرض می‌شوند).

محصلی مسئله را چنین حل کرده است:

اگر حکم برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$ab(x^2-y^2)=xy(a^2-b^2)$$

و از آنجا:

$$(ax+by)(bx-ay)=0$$

پس: $ax+by=0$ یا $bx-ay=0$.

اما رابطهٔ دوم بنا به فرض مسئله برقرار است. پس حکم ثابت شد!

چه ایرادی به این اســتدلال وارد است؟ حل مسئله باید چگونه باشد؟

حل. ایراد اســتدلال مسئله این اســت که محصل از روش معادل حکم (بازگشــتی) استفاده کرده اســت و باید به یک رابطهٔ همواره درســت برسد. اما قســمت آخر معادل حکم می‌تواند توأمان درست باشد. یعنی هم $ax+by=0$ و هم $bx-ay=0$ درست باشند و در نتیجه a و b قرینهٔ هم می‌شوند و روابط برگشت‌پذیر نیستند (تقسیم بر صفر!).

حل صحیح مسئله چنین است:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \Rightarrow x=\frac{a}{b}y$$

$$\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}=\frac{\frac{a^2}{b^2}y^2-y^2}{a^2-b^2}=\frac{\frac{(a^2-b^2)y^2}{b^2}}{a^2-b^2}$$

$$\xlongequal{a^2-b^2\neq 0}\frac{y^2}{b^2}=\frac{y}{b}\times\frac{y}{b}$$

$$=\frac{y}{b}\times\frac{x}{a}=\frac{xy}{ab}$$